

Lösungen den Textaufgaben zu $f(x) = \frac{1}{x}$

Ein Unternehmen entwickelt eine neue Technologie zur Kühlung von Hochleistungsprozessoren. Dabei wird die Temperatur des Prozessors nach dem Einschalten der Kühlung in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion f mit $f(t) = \frac{80}{t+2} + 20$ modelliert, f in °C, t in Minuten mit $0 \leq t \leq 120$.

- a. Beschreiben Sie, welche Transformationen an der Grundfunktion $g(t) = \frac{1}{t}$ vorgenommen wurden, um die Funktion $f(t)$ zu erhalten.

$$f(t) = \frac{80}{t+2} + 20$$

Verschiebung nach links um 2 Einheiten

Streckung in y-Richtung um den Faktor 80

Verschiebung nach oben um 20 Einheiten

- b. Berechnen Sie die Temperatur nach 3 Minuten.

$$f(3) = 36$$

Nach 3 Minuten beträgt die Temperatur 36 Grad.

- c. Berechnen Sie, wann die Temperatur des Prozessors 25 Grad beträgt.

$$f(t) = 25 \Leftrightarrow \frac{80}{t+2} + 20 = 25 \Leftrightarrow \frac{80}{t+2} = 5 \Leftrightarrow 5 \cdot (t+2) = 80 \Leftrightarrow t+2 = 16 \Leftrightarrow t = 14$$

Nach 14 Minuten beträgt die Temperatur 25 Grad.

- d. Berechnen Sie die Änderungsrate der Funktion f an der Stelle 3 und geben Sie an, was der Wert im Sachzusammenhang bedeutet.

$$f(t) = 80 \cdot (t+2)^{-1} + 20$$

$$f'(t) = 80 \cdot (-1) \cdot (t+2)^{-2} = \frac{-80}{(t+2)^2}$$

$$f'(3) = -3,2$$

Nach 3 Minuten sinkt die Temperatur um 3,2 Grad. Damit sinkt sie langsamer als nach einer Minute. Die Abkühlung verlangsamt sich.

- e. Berechnen Sie die mittlere Änderungsrate im Intervall $[4;8]$ und erklären Sie, was dieser Wert im Sachzusammenhang bedeutet.

$$\frac{f(8)-f(4)}{8-4} \approx \frac{28-33,34}{4} = -1,335$$

Zwischen der vierten und der achten Minute nimmt die Temperatur durchschnittlich um 1,335 Grad pro Minute ab.

- f. Nach 120 Minuten nimmt die Kühlung linear ab und wird durch die entsprechende Tangente beschrieben. Berechnen Sie, wann die Temperatur des Prozessors dann bei 10 Grad liegt.

$$f(120) \approx 20,66 \quad f'(120) \approx -0,005$$

$$y = mx + b$$

$$m = -0,005 \Rightarrow y = -0,005x + b$$

$$20,66 = -0,005 \cdot 120 + b \Leftrightarrow b = 21,26$$

$$y = -0,005x + 21,26$$

$$10 = -0,005x + 21,26 \Leftrightarrow -11,26 = -0,005x \Leftrightarrow x = 2252$$

Nach 2252 Minuten oder ca. 37,5 Stunden kühlt die Temperatur auf 10 Grad herunter.