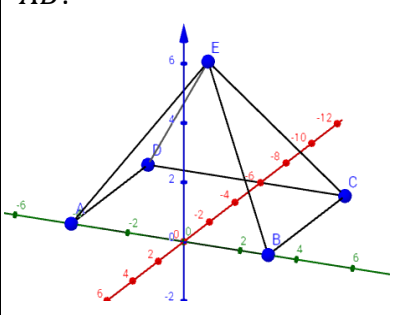


## Lösungen zu den Übungen zu Winkeln zwischen Vektoren und Geraden

| Aufgabe                                                                                                                       | Rechnung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. a. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$         | $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$ $= \frac{2 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 4 \cdot 9}{\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 9^2}} = \frac{56}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{121}} = \frac{56}{66}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{56}{66}\right) \approx 31,95$ <p>Der Winkel beträgt ungefähr 31,95°.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| b. $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$       | $\cos(\alpha) = \frac{(-4) \cdot 10 + 2 \cdot (-10) + (-4) \cdot 5}{\sqrt{(-4)^2 + 2^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{10^2 + 10^2 + 5^2}}$ $= \frac{-80}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{225}} = \frac{-80}{90} = -\frac{8}{9}$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{8}{9}\right) \approx 152,73$ <p>Der Winkel beträgt ungefähr 152,73°.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| c. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ | $\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 10 + (-8) \cdot (-6) + 16 \cdot \sqrt{8}}{\sqrt{2^2 + (-8)^2 + 16^2} \cdot \sqrt{10^2 + (-6)^2 + (\sqrt{8})^2}}$ $= \frac{113,255}{\sqrt{324} \cdot \sqrt{144}} \approx 0,524$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,524) \approx 58,39$ <p>Der Winkel beträgt ungefähr 58,39°.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| 2. Berechnen Sie die Winkel des Dreiecks, das durch die Punkte A (7/3/8), B (11/-1/9) und C (3/4/-5) aufgespannt wird!        | $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ -14 \end{pmatrix}$ $ \overrightarrow{AB}  =  \overrightarrow{BA}  = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 1^2} = \sqrt{33}$ $ \overrightarrow{BC}  = \sqrt{(-8)^2 + 5^2 + (-14)^2} = \sqrt{285}$ $ \overrightarrow{AC}  = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-13)^2} = \sqrt{186}$<br><p>Winkel bei A: <math>\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{ \overrightarrow{AB}  \cdot  \overrightarrow{AC} } = \frac{(-4) \cdot 4 + (-4) \cdot 1 + 1 \cdot (-13)}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{186}}</math></p> $= \frac{-33}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{186}} \approx -0,42$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0,42) \approx 114,9$<br><p>Winkel bei B: <math>\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{ \overrightarrow{BA}  \cdot  \overrightarrow{BC} } = \frac{(-4) \cdot (-8) + 4 \cdot 5 + (-1) \cdot (-14)}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{285}}</math></p> $= \frac{66}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{285}} \approx 0,68$ $\Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}(0,68) \approx 47,16$<br><p>Winkel bei C: <math>\cos(\gamma) = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{ \overrightarrow{CA}  \cdot  \overrightarrow{CB} } = \frac{4 \cdot 8 + (-1) \cdot (-5) + 13 \cdot 14}{\sqrt{186} \cdot \sqrt{285}}</math></p> $= \frac{219}{\sqrt{186} \cdot \sqrt{285}} \approx 0,95$ $\Leftrightarrow \gamma = \cos^{-1}(0,95) \approx 18,19$ <p>18,19 + 47,16 + 114,9 = 180,25 ≈ 180, also richtig</p> |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>3.a. <math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                          | $\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a}  \cdot  \vec{b} }$ $\frac{1 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2}}$ $= \frac{10}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{44}} \approx 0,674$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,674) \approx 47,62$ <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von <math>47,62^\circ</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| <p>b. <math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                       | $\cos(\alpha) = \frac{(-3) \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot (-6)}{\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}}$ $= \frac{-6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{49}} \approx -0,23$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(-0,23) \approx 103,3$ <p><math>180 - 103,3 = 76,7</math> (Man muss den kleineren Winkel nehmen! Alternativ kann man mit Betrag rechnen.)</p> <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von <math>76,7^\circ</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| <p>c. <math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 23 \\ 26 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                     | $\cos(\alpha) = \frac{(-1) \cdot 10 + 3 \cdot 10 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 1^2} \cdot \sqrt{10^2 + 10^2 + (-2)^2}}$ $= \frac{18}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{204}} \approx 0,38$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,38) \approx 67,67$ <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von <math>67,67^\circ</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| <p>d. <math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}</math></p> <p><math>h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}</math></p>                                                                                                                                                        | $\cos(\alpha) = \frac{2 \cdot 8 + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{8^2 + 6^2 + 2^2}}$ $= \frac{22}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{104}} \approx 0,52$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,52) \approx 58,67$ <p>Die Geraden schneiden sich in einem Winkel von <math>58,67^\circ</math>.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| <p>4. Die Punkte A(0/-4/0), B(0/3/0), C(-6/3/0), D(-6/-4/0) und E(-3/-0,5/5) legen eine Pyramide fest. Berechnen Sie den Winkel <math>\alpha</math> zwischen den Vektoren <math>\vec{EA}</math> und <math>\vec{EB}</math> sowie den Winkel <math>\beta</math> zwischen den Vektoren <math>\vec{AE}</math> und <math>\vec{AB}</math>.</p>  | $\vec{EA} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3,5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{EB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3,5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{AE} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3,5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$ $ \vec{EA}  = \sqrt{3^2 + (-3,5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{46,25}$ $ \vec{EB}  = \sqrt{3^2 + 3,5^2 + (-5)^2} = \sqrt{46,25}$ $ \vec{AE}  = \sqrt{(-3)^2 + 3,5^2 + 5^2} = \sqrt{46,25}$ $ \vec{AB}  = \sqrt{7^2} = 7$ $\cos(\alpha) = \frac{\vec{EA} \cdot \vec{EB}}{ \vec{EA}  \cdot  \vec{EB} } = \frac{3 \cdot 3 + (-3,5) \cdot 3,5 + (-5) \cdot (-5)}{\sqrt{46,25} \cdot \sqrt{46,25}} = \frac{21,75}{46,25} \approx 0,47$ $\Leftrightarrow \alpha = \cos^{-1}(0,47) \approx 61,95$ $\cos(\beta) = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{AB}}{ \vec{AE}  \cdot  \vec{AB} } = \frac{3,5 \cdot 7}{\sqrt{46,25} \cdot 7} = \frac{24,5}{\sqrt{46,25} \cdot 7} \approx 0,51$ $\Leftrightarrow \beta = \cos^{-1}(0,51) \approx 59,34$ |