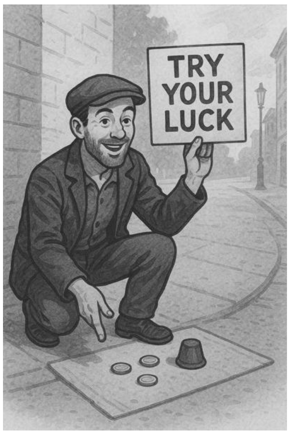
Lösung zur Einführung Erwartungswert Münzen



Auf einer Straße bietet ein Mann folgendes Spiel an:

Sie müssen als Einsatz 2€ bezahlen und dürfen danach eine Münze dreimal werfen. Wenn Sie dreimal Kopf geworfen haben, erhalten Sie 12€, wenn Sie dreimal Zahl gewürfelt haben, erhalten Sie 6€. Bei allen anderen Ergebnissen ist Ihr Geld weg.
Würden Sie an dem Spiel teilnehmen? Begründen Sie Ihre Meinung.

p(3 x Kopf) = $\frac{1}{8}$ p(3 x Zahl) = $\frac{1}{8}$
p(alle anderen Kombinationen) = $1-\frac{2}{8}=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{8}\cdot 10+\frac{1}{8}\cdot 4+\frac{3}{4}\cdot(-2)$ = 1,25 + 0,5 – 1,5 = 0,25
Im Schnitt gewinnt man 25 Cent, man sollte also spielen.

Alternativ: $\frac{1}{8}\cdot 12+\frac{1}{8}\cdot 6$ = 1,5 + 0,75 = 2,25
Im Schnitt bekommt man 2,25€ ausgezahlt, 25 Cent mehr als man eingesetzt hat, man sollte also spielen.

Definition:

Eine Zufallsgröße X ordnet jedem Ergebnis eines Zufallsversuchs eine reelle Zahl zu.

Hier: X ordnet jedem Ereignis den zugehörigen Gewinn/Verlust zu.

Tragen Sie diese Wahrscheinlichkeiten in die folgende Tabelle ein:

geworfene Kombinationen	3 x Kopf	3 x Zahl	alle anderen Kombinationen
x_i = Gewinn/Verlust	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
P(X= x_i)	10	4	-2

Berechnung:

$\frac{1}{8} \cdot 10 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot (-2) = 1{,}25 + 0{,}5 - 1{,}5 = 0{,}25$

Alternativ:

Hier: X ordnet jedem Ereignis die zugehörige Auszahlung zu.

geworfene Kombinationen	3 x Kopf	3 x Zahl	alle anderen Kombinationen
x_i = Auszahlung	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{4}$
P(X= x_i)	12	6	0

Berechnung:

$\frac{1}{8} \cdot 12 + \frac{1}{8} \cdot 6 = 1{,}5 + 0{,}75 = 2{,}25$

Definition:

Der Erwartungswert E(X) einer Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und den Wahrscheinlichkeiten $P(X=x_1)$, $P(X=x_2)$, …, $P(X=x_n)$ ist ein gewichteter Mittelwert und folgendermaßen definiert:

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X=x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{xi} \cdot \mathrm{P(X = xi)}$$