Lösung zu der Übung zu Ebenen in Koordinatenform

1. Geben Sie die Koordinatengleichung der Ebene an, in der der Punkt A liegt und die den Normalenvektor $\vec{n}$ hat. a. A(2|−5|3) und $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-7\\-6\end{pmatrix}$ b. A(−3|4|−1) und $\vec{n}=\begin{pmatrix}8\\5\\10\end{pmatrix}$ c. A(2|0|0) und $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$	a. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-5\\3\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\-7\\-6\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x_1-2)\cdot 2+(x_2+5)\cdot(-7)+(x_3-3)\cdot(-6)=0$ $\Leftrightarrow 2x_1-4-7x_2-35-6x_3+18=0 \Leftrightarrow 2x_1-7x_2-6x_3-21=0 \Leftrightarrow 2x_1-7x_2-6x_3=21$ **E:** $\boldsymbol{2x_1-7x_2-6x_3=21}$ b. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}8\\5\\10\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x_1+3)\cdot 8+(x_2-4)\cdot 5+(x_3+1)\cdot 10=0$ $\Leftrightarrow 8x_1+24+5x_2-20+10x_3+10=0 \Leftrightarrow 8x_1+5x_2+10x_3=-14$ **E:** $\boldsymbol{8x_1+5x_2+10x_3=-14}$ c. $\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow (x_1-2)=0$ **E:** $\boldsymbol{x_1=2}$
2. Gegeben sind die Punkte A, B und C. Stellen Sie eine Ebenengleichung in Koordinatenform auf, in der die 3 Punkte liegen. a. A(2|−3|6), B(−3|−8|12), C(4|0|7)	a. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-5\\-5\\6\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}7\\8\\-5\end{pmatrix}$ $\quad \vec{n}=\overrightarrow{AB}\ x\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-5\cdot(-5)-6\cdot 8\\6\cdot 7-(-5)\cdot(-5)\\(-5)\cdot 8-(-5)\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-23\\17\\-5\end{pmatrix}$ E: $(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\-3\\6\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-23\\17\\-5\end{pmatrix}=0$ $\Leftrightarrow (x_1-2)\cdot(-23)+(x_2-(-3))\cdot 17+(x_3-6)\cdot(-5)=0$ $\Leftrightarrow -23x_1+46+17x_2+51-5x_3+30=0 \Leftrightarrow -23x_1+17x_2-5x_3=-127$ **E:** $\boldsymbol{-23x_1+17x_2-5x_3=-127}$

b. A(8|6|−9), B(−2|10|−9), C(2|3|−14)	b. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{n}: -10n_1 + 4n_2 = 0$ und $4n_1 - 7n_2 - 5n_3 = 0$ Setze n_1= 1: $-10 + 4n_2 = 0$ und $4 - 7n_2 - 5n_3 = 0 \Leftrightarrow n_2 = 2{,}5$ und $4 - 17{,}5 - 5n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = -2{,}7$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -2{,}7 \end{pmatrix}$ E: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2{,}5 \\ -2{,}7 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 8) + (x_2 - 6) \cdot 2{,}5 + (x_3 + 9) \cdot (-2{,}7) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 - 8 + 2{,}5x_2 - 15 - 2{,}7x_3 - 24{,}3 = 0 \Leftrightarrow x_1 + 2{,}5x_2 - 2{,}7x_3 = -47{,}3$ **E: $\boldsymbol{x_1 + 2{,}5x_2 + 2{,}7x_3 = -47{,}3}$**
c. A(−4|2|12), B(4|−8|−2), C(−5|−9|−2)	c. $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{n}: 8n_1 - 10n_2 - 14n_3 = 0$ und $-9n_1 - n_2 = 0$ Setze n_1= 1: $8 - 10n_2 - 14n_3 = 0$ und $-9 - n_2 = 0 \Leftrightarrow n_2 = -9$ und $8 + 90 - 14n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = 7$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}$ E: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 12 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (x_1 + 4) + (x_2 - 2) \cdot (-9) + (x_3 - 12) \cdot 7 = 0$ $\Leftrightarrow x_1 + 4 - 9x_2 + 18 + 7x_3 - 84 = 0 \Leftrightarrow x_1 - 9x_2 + 7x_3 = 62$ **E: $\boldsymbol{x_1 - 9x_2 + 7x_3 = 62}$**
3. Stellen Sie die Ebenengleichung der x_1,x_2−Ebene und der x_2,x_3−Ebene in Koordinatenform auf.	x_1,x_2−Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und P(0|0|0) **E: $\boldsymbol{x_3 = 0}$** x_2,x_3−Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und P(0|0|0) **E: $\boldsymbol{x_1 = 0}$**

4. Gegeben ist die Ebene E: $2x_1 + 13x_2 - 4x_3 = 6$.

a. Untersuchen Sie, ob die Punkte P(2|−3|−7) und Q(1,5|−5|−17) in der Ebene liegen.

b. Bestimmen Sie eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, sodass der Punkt R (6a|−2|a) in der Ebene liegt.

c. Untersuchen Sie die Lage der Ebene E zu den Geraden $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix}$ und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

d. Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$ schneidet die Ebene E. Berechnen Sie den den Schnittwinkel, in dem die Gerade die Ebene schneidet.

e. Berechnen Sie die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) der Ebene E.

---

a. $2 \cdot 2 + 13 \cdot (-3) - 4 \cdot (-7) = 4 - 39 + 28 = -7 \neq 6$ => **P liegt nicht in E_1.**

$2 \cdot 1{,}5 + 13 \cdot (-5) - 4 \cdot (-17) = 3 - 65 + 68 = 6$ => **Q liegt in E_1.**

b. $2 \cdot 6a + 13 \cdot (-2) - 4 \cdot a = 12a - 26 - 4a = 8a - 26$

$8a - 26 = 6 \Leftrightarrow 8a = 32 \Leftrightarrow$ **a = 4**

c. g_1: $2 \cdot (-2 + 8r) + 13 \cdot (5 - 3r) - 4 \cdot (10 - 6r) = 6$

$\Leftrightarrow -4 + 16r + 65 - 39r - 40 + 24r = 6 \Leftrightarrow r + 21 = 6 \Leftrightarrow r = -15$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + (-15) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -122 \\ 50 \\ -80 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g_1 schneidet die Ebene im Punkt S(−122|50|−80)

g_2: $2 \cdot (4 + 7r) + 13 \cdot (-6 + 14r) - 4 \cdot (-11 + 9r) = 6$

$\Leftrightarrow 8 + 14r - 78 + 182r + 44 - 36r = 6 \Leftrightarrow 160r - 26 = 6 \Leftrightarrow r = \frac{32}{160} = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix} + 0{,}2 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{,}4 \\ -3{,}2 \\ -9{,}2 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g_2 schneidet die Ebene im Punkt S(5,4|−3,2|−9,2)

d. $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ -6 \end{pmatrix}$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{|18 - 65 + 24|}{\sqrt{189} \cdot \sqrt{142}}\right) = \sin^{-1}\frac{23}{\sqrt{189} \cdot \sqrt{142}} \approx \sin^{-1}(0{,}14) \approx 8{,}05°$$

Der Winkel, in dem die Gerade die Ebene schneidet, beträgt 8,05°.

e. x_1-Achse: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Einsetzen in E ergibt: $2x_1 = 6 \Leftrightarrow x_1 = 3$ => **S_1(3|0|0)**

x_2-Achse: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Einsetzen in E ergibt: $13x_2 = 6 \Leftrightarrow x_2 = \frac{6}{13}$ => **$S_2(0|\frac{6}{13}|0)$**

f. Gegeben ist eine zweite Ebene F: $8x_1 - 11x_2 - 6x_3 = 10$, die die Ebene E schneidet. Berechnen Sie den Schnittwinkel, in dem sich die beiden Ebenen schneiden.	x_3-Achse: $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Einsetzen in E ergibt: $-4x_3 = 6 \Leftrightarrow x_3 = -1{,}5$ => **$S_3(0\|0\|-1{,}5)$** f. $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}\right\|}{\left\|\begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix}\right\| \cdot \left\|\begin{pmatrix} 8 \\ -11 \\ -6 \end{pmatrix}\right\|}\right) = cos^{-1}\left(\frac{\|16-143+24\|}{\sqrt{189} \cdot \sqrt{221}}\right) = cos^{-1}\left(\frac{103}{\sqrt{189} \cdot \sqrt{221}}\right) \approx cos^{-1}(0{,}504) \approx 59{,}735°$ **Der Winkel, in dem sich die Ebenen schneiden, beträgt 59,74°.**