Lösung zu den zusammenfassenden Übung zu Binomialverteilung und Wahrscheinlichkeit im Abitur

Eine Firma produziert Energiesparlampen in Massenproduktion. Die Wahrscheinlichkeit einer Lampe, fehlerhaft zu sein, beträgt 5 %. Pro Tag werden 20.000 Lampen produziert. Es wird angenommen, dass die Anzahl der fehlerhaften Lampen binomialverteilt ist.

1. Mit wie vielen fehlerhaften Lampen muss man pro Tag rechnen?	$\mu = 20.000 \cdot 0{,}05 = 1.000$ Die erwartete Anzahl fehlerhafter Lampen beträgt 1.000.
2. Schreiben Sie den Term auf, der die Wahrscheinlichkeit darstellt, dass genau 900 Lampen fehlerhaft sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit anschließend.	$B_{20.000;0,05}(X = 900) = \binom{20.000}{900} \cdot 0{,}05^{900} \cdot 0{,}95^{19.100}$ $\approx 0{,}000059$
3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass pro Tag a. höchstens 1000 Lampen fehlerhaft sind. b. zwischen 800 und 1100 Lampen fehlerhaft sind.	a. $P_{20.000;0,05}(X \leq 1000) \approx 0{,}5084$ b. $P_{20.000;0,05}(800 \leq X \leq 1100) \approx 0{,}9994$
4. Stellen Sie einen Term auf, der die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass nur die ersten 1.000 Lampen fehlerhaft sind. Sie brauchen die Wahrscheinlichkeit nicht zu berechnen.	$0{,}05^{1.000} \cdot 0.95^{19.000}$
5. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Lampen um mehr als eine Standardabweichung vom Erwartungswert abweicht.	$\mu = 1.000 \qquad \sigma = \sqrt{1.000 \cdot 0{,}95} \approx 30{,}82$ $\mu - \sigma = 969{,}18$ $\mu + \sigma = 1030{,}82$ $P_{20.000;0,05}(970 \leq X \leq 1030) \approx 0{,}6776$ $1 - 0{,}6776 = 0{,}3223$ Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 32,24 %.
6. Formulieren Sie in diesem Kontext ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Term berechnet werden kann: $1 - (0{,}95^{20.000} + 20.000 \cdot 0{,}95^{19999} \cdot 0{,}05)$	$0{,}95^{20000}$ bedeutet, dass alle Lampen funktionstüchtig sind. $20.000 \cdot 0{,}95^{19999} \cdot 0{,}05$ bedeutet, dass nur eine Lampe kaputt ist Der Term beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Lampen kaputt sind.
7. Berechnen Sie, viele Lampen muss man mindestens prüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % mindestens eine fehlerhafte Lampe zu finden.	$1 - B_{20.000;0,05}(X = 0) \geq 0{,}98$ $\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \cdot 0{,}05^{0} \cdot 0{,}95^{n} \geq 0{,}98$ $\Leftrightarrow 1 - 0{,}95^{n} \geq 0{,}98$ $\Leftrightarrow 0{,}95^{n} \leq 0{,}02$ $\Leftrightarrow n \geq 76{,}26$ Man muss mindestens 77 Lampen prüfen.
8. Bestimmen Sie, viele Lampen man mindestens prüfen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % mindestens 100 fehlerhafte Lampe zu finden.	Gesucht n, sodass $P_{n;0,05}(X \geq 100) \geq 0{,}98$. $P_{2420;0,05}(X \geq 100) \approx 0{,}9799$ $P_{2421;0,05}(X \geq 100) \approx 0{,}98012$ Man muss mindestens 2421 Lampen prüfen.

9. Berechnen Sie, wie viele Energiesparlampen produziert werden müssen, um im Mittel 3990 funktionsfähige Lampen zu erhalten.	$\mu = 3990 \Leftrightarrow n \cdot 0{,}95 = 39900 \Leftrightarrow n = 4200$ Es müssen 4200 Lampen produziert werden.
10. Ein Händler kontrolliert eine Stichprobe von 400 Lampen und findet 30 fehlerhafte Lampen. Beurteilen Sie mithilfe der 3σ-Regel, ob die Annahme, dass 5 % der Lampen fehlerhaft sind, weiterhin plausibel ist.	$\mu = 400 \cdot 0{,}05 = 20 \quad \sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}95} \approx 4{,}36 > 3$ $\mu - 3\sigma = 6{,}92$ $\mu + 3\sigma = 33{,}08$ Da 30 im Intervall [7;33] liegt, ist die Annahme mit der 3σ-Regel weiterhin plausibel.
11. Nach einer Optimierung soll die Fehlerquote auf 3 % gesenkt werden. Die Produktionsleiterin erhält einen Bonus, wenn in einer Stichprobe von 500 Lampen höchstens 15 fehlerhaft sind. a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält die Produktionsleiterin den Bonus, obwohl die Fehlerquote bei 5 % bleibt? b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält die Produktionsleiterin keinen Bonus, obwohl die Fehlerquote auf 3 % gesenkt wurde?	a. $P_{500;0{,}05}(X \leq 15) \approx 0{,}0198$ Die Wahrscheinlichkeit liegt bei ca. 2 %. b. $P_{500;0{,}03}(X > 15) \approx 0{,}4319$ Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 43,19 %.
12. In einer zweiten Firma liegt die Wahrscheinlichkeit einer Lampe, fehlerhaft zu sein, bei nur 4 %. Ein Baumarkt erhält 80% seiner Lampen von dieser zweiten Firma und 20% von der obigen. a. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Lampe im Baumarkt fehlerhaft ist. b. Der Kunde hat eine fehlerhafte Lampe gekauft. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde diese Lampe von der Firma Beta geliefert? c. Eine Kundin hat eine funktionierende Lampe erstanden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wurde diese Lampe von der Firma Alpha geliefert?	a. $p = 0{,}8 \cdot 0{,}04 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}042$ Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 4,2%. b. $\frac{0{,}8 \cdot 0{,}04}{0{,}042} = \frac{0{,}032}{0{,}042} = 0{,}7619$ Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 76,19%. c. $\frac{0{,}2 \cdot 0{,}95}{0{,}958} = \frac{0{,}19}{0{,}958} = 0{,}1983$ Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 19,83%.
13. Ein Händler bestellt seine Lampen bei der Firma Gamma, die zwar viel billiger ist, jedoch eine Fehlerquote von 10% hat. Ein Kunde bestellt 35 Lampen. Der Händler liefert wegen der hohen Fehlerquote 38 Lampen. a. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zu wenige Lampen funktionsfähig? b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mehr als eine Lampe übrig?	14. $P_{38;0{,}9}(X \leq 34) \approx 0{,}5353$ Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 53,53 %. 15. $P_{38;0{,}9}(X \geq 37) \approx 0{,}0953$ Die Wahrscheinlichkeit liegt bei 9,53 %.