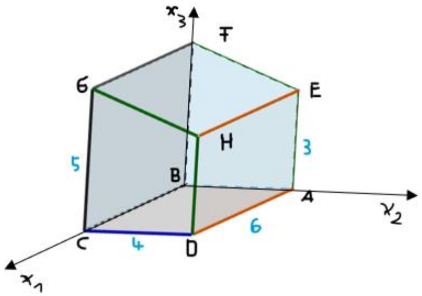
Lösung zur Übung zu Winkeln zwischen sich schneidender Ebene und Gerade

1. a. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}7\\-3\\-8\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$	Berechnung eines Normalenvektors von E: $5n_1 + n_2 + n_3 = 0$ und $4n_1 + 2n_2 + 3n_3 = 0$ Setze z.B. n_1=1: $5 + n_2 + n_3 = 0$ und $4 + 2n_2 + 3n_3 = 0$ Nehme I $\cdot (-2)$: $-10 - 2n_2 - 2n_3 = 0$ und $4 + 2n_2 + 3n_3 = 0$ I+II: $-6 + n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = 6$ => Einsetzen in II: $4 + 2n_2 + 18 = 0 \Leftrightarrow n_2 = -11$ $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-11\\6\end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$ $\vec{n} \cdot \vec{u} = 4 - 12 = -8$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{1^2 + (-11)^2 + 6^2} = \sqrt{158}$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20}$ $\alpha = \sin^{-1}(\frac{\|-8\|}{\sqrt{158} \cdot \sqrt{20}}) \approx \sin^{-1}(0{,}14) \approx 8{,}05$ Der Winkel zwischen der Ebene und der Gerade beträgt 8,05 Grad.
b. E_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-5\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\-2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4\\-5\\2\end{pmatrix}$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-14\\20\\-12\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix}$	$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\7\\15{,}5\end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix}-2\\-3\\-6\end{pmatrix}$ $\vec{n} \cdot \vec{u} = -116$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{290{,}25}$ $\quad |\vec{u}| = 7$ $\alpha = \sin^{-1}(\frac{\|-116\|}{\sqrt{290{,}25} \cdot 7}) \approx \sin^{-1}(0{,}97) \approx 75{,}93$ Der Winkel zwischen der Ebene und der Gerade beträgt 75,93 Grad.
c. E: $\vec{x} = \begin{pmatrix}12\\-3\\16\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-4\\2\\8\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}20\\5\\-11\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$	$\vec{n} = \begin{pmatrix}9\\2\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ $\vec{n} \cdot \vec{u} = 30$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{101}$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{24}$ $\alpha = \sin^{-1}(\frac{30}{\sqrt{101} \cdot \sqrt{24}}) \approx \sin^{-1}(0{,}61) \approx 37{,}59$ Der Winkel zwischen der Ebene und der Gerade beträgt 37,59 Grad.

d. E: $x_1 - 2x_2 + x_3 = -4$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n} \cdot \vec{u} = 15$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{6}$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{105}$ $\alpha = \sin^{-1}(\frac{15}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{105}}) \approx \sin^{-1}(0{,}6) \approx 36{,}87$ Der Winkel zwischen der Ebene und der Gerade beträgt 36,87 Grad.
e. E: $2x_1 - x_2 - 6x_3 = 2$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 10 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n_1} \cdot \vec{u} = 12$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{41}$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{96}$ $\alpha = \sin^{-1}(\frac{12}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{96}}) \approx \sin^{-1}(0{,}19) \approx 10{,}95$ Der Winkel zwischen der Ebene und der Gerade beträgt 10,95 Grad.
f. E: $5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$	$\vec{n} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\vec{n} \cdot \vec{u} = 3$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{33}$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{35}$ $\alpha = \sin^{-1}(\frac{3}{\sqrt{33} \cdot \sqrt{35}}) \approx \sin^{-1}(0{,}09) \approx 5{,}13$ Der Winkel zwischen der Ebene und der Gerade beträgt 5,13 Grad.
2. Ein Meteorit stürzt auf das Dach der folgenden Scheune. Die Rakete fliegt entlang der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 54 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$.	Dach: F(0|0|5), G(6|0|5), E(0|4|3) => E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ a. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 54 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = \frac{1}{2}, s = \frac{1}{3}, t = 10$ Berechnung des Schnittpunktes: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 22 \\ 12 \\ 54 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$



a. Zeigen Sie, dass die Rakete das Dach im Punkt P(2|2|4) trifft.

b. Berechnen Sie den Winkel, mit dem die Rakete auf das Dach stürzt.

b. Berechnung eines Normalenvektors von E: $4n_2 - 2n_3 = 0$ und $6n_1 = 0$

Setze z.B. n_3=2: $2n_2 = n_3$ und $n_1 = 0$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = -11$ $\quad |\vec{n}| = \sqrt{5}$ $\quad |\vec{u}| = \sqrt{30}$

$\alpha = \sin^{-1}(\frac{|-11|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{30}}) \approx \sin^{-1}(0{,}9) \approx 64{,}16$

Der Einschlagwinkel beträgt 64,16 Grad.